

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 8$  et, pour tout  $n$  supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

- Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
- Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on souhaite calculer  $u_n$  à l'aide de l'algorithme suivant :

**Variables :**  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels  
 $i$  et  $n$  sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

**Initialisation :**  $a$  prend la valeur 3  
 $b$  prend la valeur 8

**Traitement :** Saisir  $n$   
 Pour  $i$  variant de 2 à  $n$  faire  
     |  $c$  prend la valeur  $a$   
     |  $a$  prend la valeur  $b$   
     |  $b$  prend la valeur ...  
 Fin Pour

**Sortie :** Afficher  $b$

- Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

$n$	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$u_n$	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

- Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite  $(u_n)$  ?
- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $C_n$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .  
 On note  $A$  la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $C_{n+1} = AC_n$ .  
 Déterminer  $A$  et prouver que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $C_n = A^n C_0$ .
  - Soient  $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .  
 Calculer  $QP$ .  
 On admet que  $A = PDQ$ .  
 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $A^n = PD^nQ$ .
  - À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.  
 Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

La suite  $(u_n)$  a-t-elle une limite ?