

Les chouettes tachetées sont les principaux prédateurs d'une espèce de souris vivant dans la même région. On cherche à étudier l'évolution des deux populations mois après mois. Notons u_n la population des chouettes et v_n celle des souris (en milliers) au n -ième mois. On suppose :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5v_n \\ v_{n+1} = -0,1u_n + 1,1v_n \end{cases}$$

1. a. S'il n'y avait aucune souris, comment évoluerait la population de chouettes ?
b. S'il n'y avait aucune chouette, que se passerait-il pour la population des souris ?
2. Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, pour tout entier n .
 - a. Écrire le système linéaire sous la forme d'une égalité matricielle du type $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on précisera.
 - b. Démontrer soigneusement que l'on a $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix}$.
 - a. Calculer la population de chacune des deux espèces après un mois, après deux mois.
 - b. En utilisant une calculatrice ou un logiciel et en s'appuyant sur le résultat de la question 2. b., calculer (à l'unité près) X_6 , X_{12} et X_{18} .
4. Que peut-on conjecturer quant à l'évolution de la répartition des deux populations lorsque n tend vers $+\infty$?