

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n -ième tirage.

1. a. Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1).$$

- b. Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = (P(X_n=0) \quad P(X_n=1) \quad P(X_n=2))$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $(0 \quad 0 \quad 1)$.

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n , $R_{n+1} = R_n \times M$.

Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n , $R_n = R_0 \times M^n$.

3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n , $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel n , $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a. Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n .

- b. Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n .

5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=0)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=2)$.

Interpréter ces résultats.