**Partie A**

On considère les matrices $M$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où $a$ et $b$ sont des nombres entiers.
Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de $M$. On le note $\det(M)$.
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.
   Justifier que $N$ est l'inverse de $M$.
2. On considère l'équation $(E)$ : $\det(M) = 3$.
   On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\,;\,b)$ solutions de l'équation $(E)$.
   **a.** Vérifier que le couple $(6\,;\,3)$ est une solution de $(E)$.
   **b.** Montrer que le couple d'entiers $(a\,;\,b)$ est solution de $(E)$ si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.
   En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$.

**Partie B**

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
   En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de $Q$.

2. *Codage avec la matrice Q*

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

**Étape 1 :** On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où $x_1$ est l'entier correspondant à la première lettre du mot et $x_2$ l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

**Étape 2 :** La matrice $X$ est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

**Étape 3 :** La matrice $Y$ est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que $r_1$ est le reste de la division euclidienne de $y_1$ par 26 et $r_2$ est le reste de la division euclidienne de $y_2$ par 26.

**Étape 4 :** À la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \to X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \to R \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \to \text{OF}.$$

Le mot JE est codé en le mot OF.
Coder le mot DO.

**3.** *Procédure de décodage*

On conserve les mêmes notations que pour le codage.

Lors du codage, la matrice $X$ a été transformée en la matrice $Y$ telle que $Y = QX$.

**a.** Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 & = & 3r_1 - 3r_2 \quad [26] \\ 3x_2 & = & -5r_1 + 6r_2 \quad [26] \end{array}\right.$

**b.** En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad 26$, montrer que $\left\{\begin{array}{ll} x_1 & \equiv r_1 - r_2 \quad [26] \\ x_2 & \equiv 7r_1 + 2r_2 \quad [26] \end{array}\right.$

**c.** Décoder le mot SG.