

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \quad (E)$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x ; y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

```

Variables :  X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :      Pour X variant de -5 à 10
              (1) .....
              (2) .....
              Alors Afficher X et Y
              Fin Si
              Fin Pour
            Fin Pour
          Fin
  
```

2. a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
 b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
 c. Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n : y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = MX_n$.
 b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n , X_n en fonction de M^n et X_0 .

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P , notée P^{-1} , est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
- a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
 - b. Pour tout entier naturel n , donner D^n sans justification.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $M^n = PD^nP^{-1}$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n , $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.
- En déduire que, pour tout entier naturel n , une expression de x_n et y_n en fonction de n .
4. Montrer que, pour tout entier naturel n , le point A_n appartient à la droite $\mathcal{D}$.