

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrer que : $P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X .

c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, p(Z \leq k) = \int_0^k 0,01e^{-0,01x} dx.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leq 50)$.

b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».