

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement. On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$p(D \leq A) = \int_0^A \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx.$$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millime.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

- a. comprise entre 50 et 100 km ;
- b. supérieure 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.

- a. Au moyen d'une intégration par parties, calculer $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$ où A est un nombre réel positif.
- b. Calculer la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).

4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.

d tant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

- a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.
- b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.