Exercice 2 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité un certain modèle de stylo.

Dans les parties A et B, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi binomiale

On prélève un stylo, au hasard, dans une importante livraison destinée à une chaîne d'hypermarchés.
On note E l 'évènement « un stylo prélevé au hasard est défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0,016$.
On prélève au hasard vingt stylos dans la livraison pour vérification. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de vingt stylos à un tirage avec remise de vingt stylos.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de vingt stylos, associe le nombre de stylos défectueux de ce prélèvement

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il n'y ait aucun stylo défectueux.
3. En déduire la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins un stylo défectueux.

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les stylos sont livrés aux grandes surfaces par lots de 1 000. On prélève au hasard un lot de 1 000 stylos dans un depôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 stylos.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1 000 stylos, associe le nombre de stylos défectueux parmi les 1 000 stylos. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,016$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 4.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.

   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 4.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 17 stylos défectueux, c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 17,5)$.

C. Probabilités conditionnelles

L'usine possède deux ateliers de fabrication, notés « atelier 1 » et « atelier 2 ».
L'atelier 1 produit 60 % de la production et l'atelier 2 produit le reste.
1 % des stylos provenant de l'atelier 1 sont défectueux et 2,5 % des stylos provenant de l'atelier 2 sont défectueux.
On prélève au hasard un stylo parmi la production totale des deux ateliers d'une journée.
On définit les évènements suivants :

A : « le stylo prélevé provient de l'atelier 1 » ;
B : « le stylo prélevé provient de l'atelier 2 » ;
D : « Le stylo prélevé est défectueux ».

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$, $P(D/B)$.
(On rappelle que $P(D/A) = P_A(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. Déduire de ce qui précède $P(D)$.