

EXERCICE 2

(8 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Un particulier souhaite acheter, auprès d'un producteur, des bottes de paille pour l'isolation de sa maison.

Dans cette exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} .

A. Loi normale

On prélève au hasard une botte de paille dans la production du 20 juillet 2011.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque botte ainsi prélevée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne 360 et d'écart type 18. Calculer la probabilité $p(350 \leq X \leq 370)$.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque botte prélevée dans la production de cette journée, associe sa densité exprimée en kg/m^3 . On admet que Y suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 5.
Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée ait une densité comprise entre $90 \text{ kg}/\text{m}^3$ et $110 \text{ kg}/\text{m}^3$.
3. On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Une botte de paille est conforme aux normes d'isolation si son épaisseur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[350; 370]$ et si sa densité, exprimée en kg/m^3 , appartient à l'intervalle $[90; 110]$. Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée soit conforme aux normes d'isolation.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

B. Loi binomiale

On considère un stock important de bottes de paille, dont une partie est destinée à un usage d'isolation. On note E l'événement : « une botte prélevée au hasard dans le stock est conforme aux normes d'isolation ». On suppose que $p(E) = 0,4$.

On prélève au hasard 5 bottes de paille dans le stock pour vérification de la conformité aux normes d'isolation. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 5 bottes. On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 5 bottes ainsi défini, associe le nombre de bottes de paille conformes aux normes d'isolation.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, toutes les bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins quatre bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.