Exercice 24

Une machine industrielle est capable de produire des pièces métalliques de longueur X (en centimètres) suivant une loi $\mathcal{N}(\mu,1)$. Le caractère aléatoire de X et notamment sa variance $\sigma^2 = 1$ reflètent les imprécisions de fabrication. On souhaite régler la machine, autrement dit μ, pour qu'elle produise des pièces de longueur comprise entre 99 et 101 centimètres avec la probabilité la plus grande possible. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on pose : $g(\mu) = P(99 \leqslant X \leqslant 101)$.

1. Soit $Z = X - \mu$. Quelle loi suit la variable aléatoire Z ?
2. Exprimer $g(\mu)$ en fonction de Z.
3. Soit la fonction F définie pour tout x par $F(x) = \int_{100}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, où f désigne la densité de Z. Déterminer la dérivée de F en fonction de f.
4. Exprimer, pour tout μ, $g(\mu)$ en fonction de F.
5. En déduire $g'(\mu)$ pour tout μ.
6. Établir le tableau de variation de g.
7. En déduire la valeur de μ qui maximise $P(99 \leqslant X \leqslant 101)$.
   Que vaut cette probabilité maximale ?

Théorème de Moivre-Laplace

Exercice 25

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(121;0,5)$.

1. Calculer à l'aide d'une calculatrice, $P\left(-2 \leqslant \dfrac{X-60,5}{5,5} \leqslant 2\right)$.
2. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Que vaut $P(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$.
3. Pourquoi ces deux quantités sont-elles proches ?

Exercice 26

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(81;0,2)$.

1. D'après le théorème de Moivre-Laplace, à quelle intégrale et approximativement égale, $P\left(-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{X-16,2}{3,6} \leqslant \dfrac{3}{2}\right)$?
2. Pourquoi peut-on raisonnablement accepter l'approximation précédente ?
3. En déduire que : $P(14,4 < X < 21,6) \approx P\left(-\dfrac{1}{2} < Z < \dfrac{3}{2}\right)$, où $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$
4. Utiliser l'approximation précédente pour calculer $P(14,4 < X < 21,6)$.
5. Comparer avec la valeur de $P(14,4 < X < 21,6)$ fournie par la calculatrice.