

► Un parti politique fait un sondage d'opinion.

On note  $p$  la proportion de la population favorable à ce parti politique.

On interroge un échantillon de  $n$  personnes dans la population et on considère la variable aléatoire  $X_i$  donnant la  $i^{\text{ème}}$  réponse au sondage d'opinion pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $n$ .

On considère que les variables  $X_i$ , pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $n$ , sont indépendantes.

**a** Donner la loi de probabilité des variables aléatoires  $X_i$  pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $n$ .

**b** On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

Que représente la variable aléatoire  $S_n$  ?

**c** On pose  $M_n = \frac{S_n}{n}$ .

Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $M_n$ .

**d** Montrer que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ ,

$$P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

**e** Combien de personnes suffit-il d'interroger pour obtenir une approximation de la proportion de la population favorable à ce parti politique  $p$  à 0,05 près avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 ?