On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée.

Pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenr le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0{,}4$ démontrer que $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$ et $p_3 = 0{,}3$.

2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

a. Pour à $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement ($X = i$).

b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

c. Calculer la probabilité de l'évènement ($X \geq 1$). On donnera une valeur arrondie au millième.

4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n^{\text{ième}}$ lancer.

a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

b. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).

c. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0{,}999$.