TS **LOGRITHME** feuille 36

Première partie

On considère la fonction numérique *f* définie sur $[\,0\,;\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\dfrac{x+2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. a. Montrer que *f* est continue en 0.

b. *f* est-elle dérivable en 0 ?

c. On pose $h = \dfrac{2}{x}$ avec $(x > 0)$. trouver la limite de *f* quand *x* tend vers +∞.

2. a. Pour *x* > 0 calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et vérifier que $f''(x) = -\dfrac{4}{x(x+2)^2}$.

b. Etudier le sens de variation de $f'(x)$ et trouver la limite de $f'(x)$ quand *x* tend vers +∞. En déduire le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de $f(x)$.

3. On appelle C la courbe représentative de $f(x)$ (unités : 4 cm). Tracer C en indiquant la tangente en O et au point A d'abcisse 2.

4. Soit *u* la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ et H sa représentation graphique dans le même repère que C.

a. Dresser le tableau de variation de *u* et vérifier que pour tout *x*>0 on a $f(x) - u(x) = xf'(x)$.

En déduire la position relative de C et H. Tracer H en indiquant le point B d'abcisse 2.

b. λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à C au point d'abcisse λ rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée *u*(λ). En déduire à l'aide du tracé de H la construction de la tangente à C au point d'abcisse λ. Indiquer la construction ainsi de la tangente à C au point A.

Deuxième partie

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions *g*, définies et dérivables sur]0, +∞[et possédant la propriété suivante P : $g(x) - xg'(x) = \dfrac{2x}{x+2}$. *g* étant définie et dérivable sur]0, +∞[on pose $G(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

1. Montrer que *g* possède la propriété P si et seulement si $G'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$.

2. En déduire l'ensemble (E).