Exercice 1

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$.

1) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) Etudier les variations de f.
3) Montrer que $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est positif et en déduire le signe de f.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}$

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Démontrer que $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ et en déduire les variations de g sur $]0;+\infty[$.
3) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.
4) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et D.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\big((x-1)(3-x)\big)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 4

1) On considère la fonction $u: x \mapsto \ln(x) - x$ définie sur $]0;+\infty[$. Etudier les variations de u. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de u sur $]0;+\infty[$.
2) En utilisant la question précédente, étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 2x$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - (\ln x)^2$

1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 0. Déterminer les asymptotes éventuelles de $\mathcal{C}_f$.
2) Calculer f' et dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
3) Préciser les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
4) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e^2.
5) On note D_k la droite d'équation $y = k$ avec $k < 1$. Montrer que pour tout réel $k < 1$, la droite D_k coupe $\mathcal{C}_f$ en deux points d'abscisses respectives m et m'.
6) Montrer que $mm' = e^2$ pour tout réel $k < 1$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 3x - x\ln(x)$.

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Etudier les variations de f.