On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$f(x) = 4 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2.$$

- b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}.$$

- b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.
- c. Calculer $f(1)$ et $f(e^2)$.

On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{e^2}$	0
		↘	↗	↘
		0		0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .