★ **Partie A - Préliminaires**

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = e^t - t - 1.$$

Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $] -\infty ; +\infty[$?

2. En déduire les inégalités suivantes :
- Pour tout réel t , $e^t \geq t + 1$, $e^t > t$ et $-te^{-t} > -1$.
 - Pour tout réel t tel que $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.
3. En déduire que pour tout réel x , $\ln(1 - xe^{-x}) < -xe^{-x}$.

★ **Partie B - Étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x).$$

1. Montrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Dans un repère orthonormal (unité : 3 cm), on considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2 - 2x$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f . Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$ sont asymptotes en $+\infty$. Étudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$.

3. Donner une équation de chacune des tangentes $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ respectivement aux courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisse 0.
4. Tracer dans un même repère les courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$ et leurs tangentes $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$.