Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.
Sa courbe représentative, notée $\mathscr{C}_f$, est tracée dans un repère orthonormé en annexe ci-dessous.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

   b) Étudier le signe de la fonction dérivée f' sur l'intervalle I.

   c) Recopier et compléter le tableau des variations de f sur I.

x	0		$\cdots$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$\cdots$	0	$\cdots$	
variations de f	‖ $-\infty$				1

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près, de α.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
   Tracer sur le graphique donné en annexe, la tangente T.
4. La dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie pour tout réel x strictement positif par

$$f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

   Étudier la convexité de la fonction f.

ANNEXE