

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0 ; +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.

À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n.$$

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.
5. Étude de la convergence de la suite (u_n) .
 - a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
 - b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.
- c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n.$$
Montrer alors que $\frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ .