

1. Montrer que, pour tout réel x positif, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

(où $\ln x$ représente le logarithme népérien de x).

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On admettra que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.