Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(\mathrm{e}^x + kx) - x.$$

Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1 + a) \leqslant a$.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_1(x) = \ln(\mathrm{e}^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : Étude et propriétés des fonctions f_k.

1. Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$
   $f_k(x) = \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.
3. **a.** Dresser le tableau de variation de f_k.

   b. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_m$.
6. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.