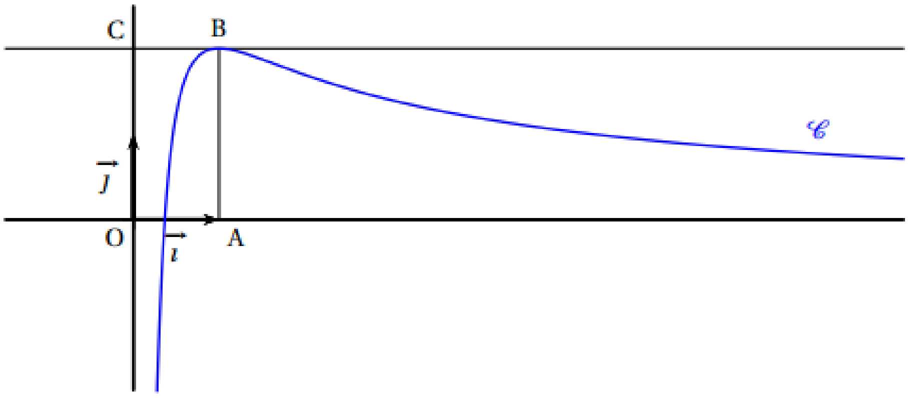
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,,0)$, $(1\,,2)$, $(0\,,2)$;
— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

   b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,,1]$.

   b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,,+\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.