

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 \ln(x+3) - x.$$

1.
 - a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0 ; +\infty[$.
 - b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a

$$f(x) = x \left(5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

- d. En déduire la limite de f en $+\infty$.
 - e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On notera α cette solution.
 - b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14 ; 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
 - c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 5 \ln(u_n + 3) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n \neq 0$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 5 \ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g .

1.
 - a. Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
 - b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)
2.
 - a. Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.
 - d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u - 14,2 < 0$
 u prend la valeur de $5 \ln(u + 3)$
Fin du Tant que
Afficher u

a. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

À rendre avec la copie

