

EXERCICE 3

6 points

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.
Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

- On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n . Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u .

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

- Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n .
- Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3} .

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n ,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2. a. Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$.

En déduire que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (1).

- b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \dots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n ,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- c. En déduire que pour tout entier strictement positif n , $u_n \geq 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.