EXERCICE 2 **5 points**

PARTIE A. Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

PARTIE B.

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

   c. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   d. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

   b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieur ou égale à 10^{-2}.