

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln x$$

1. étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α , arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.
Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite Δ .
3. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f .
5. Tracer la courbe \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine \mathcal{D} du plan compris entre la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2 , est donnée par :

$$I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

2. a) Calculer l'intégrale $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n .
3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine \mathcal{D} quand n tend vers $+\infty$.