La constante d'Euler (ou nombre γ)

On considère la série harmonique (H_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

- 1) Etude de la suite (H_n)
 - a) Calcule H_1, H_2, H_3 et H_4 et en donner une valeur décimale approchée.
 - b) Montrer que : pour $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ et pour $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$
 - c) En déduire que : pour tout $k \geq 1$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
 - d) En déduire que : pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n$
 - e) Que peut-on dire de la convergence de (H_n) ?
- 2) On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = H_n - \ln(n)$.
 - a) Justifier que la suite (u_n) est positive.
 - b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$
 - c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
 - d) Que peut-on dire de la convergence de (u_n) ?

La limite de la suite (u_n) , notée γ , s'appelle la constante d'Euler ($\gamma \approx 0,577$)

La série harmonique alternée

On considère la série harmonique alternée (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$

- 1) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$
Montrer que ces suites sont adjacentes. On note l leur limite commune.
Montrer que (S_n) converge aussi vers l .
- 2) Soit x un réel positif.
 - a) Montrer que : $1 - x + x^2 + \dots + (-1)^{2n-1} x^{2n-1} = \frac{1 - (-x)^{2n}}{1+x}$
 - b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{2n-1} x^{2n}}{2n}\right)$.
Calculer la dérivée f' de f et préciser son signe sur $\mathbb{R}_+$.
Calculer $f(0)$ et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}_+$:
$$x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{2n-1} x^{2n}}{2n} \leq \ln(1+x)$$
 - c) Démontrer par une méthode analogue que : $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{2n} x^{2n+1}}{2n+1}$
 - d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq \ln(2) \leq v_n$ puis que $l = \ln(2)$