On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln x-1$.

Partie A : Étude d'une fonction

1. a. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction *f* en 0.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction *f*. Calculer $f'(x)$ pour tout réel *x* de $]0\,;+\infty[$.

En déduire le tableau de variations de la fonction *f* sur $]0\,;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.

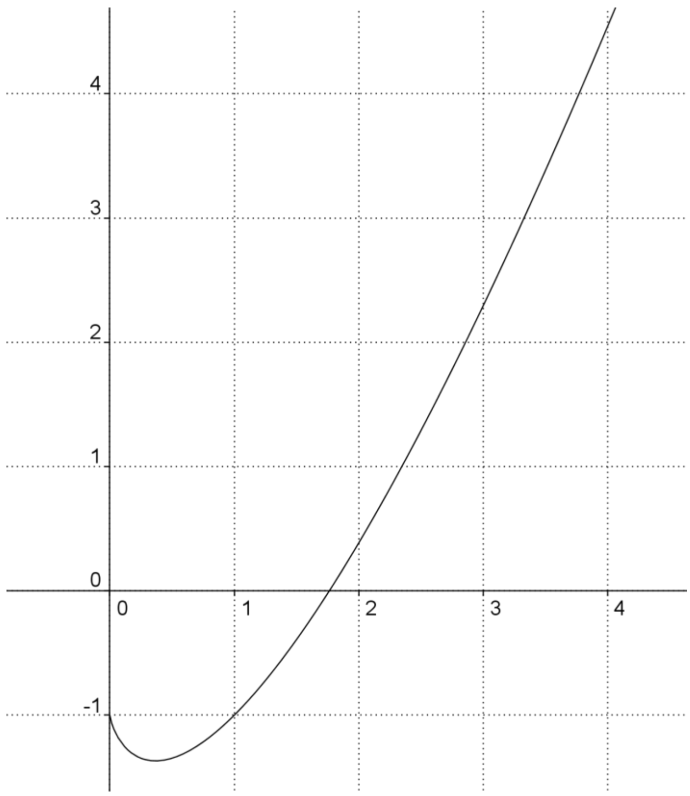
4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque *x* appartient à $]0\,;+\infty[$.

5. Montrer que $\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne ci-contre la courbe C, représentation graphique de la fonction *f* dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$I=\int_{\alpha}^{4} f(x)\,dx.$$



1. Justifier que l'intégrale *I* est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $J=\int_{\alpha}^{4} x\ln x\,dx$.

3. Montrer l'égalité : $I=\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha+16\ln 2-8$.

En déduire une valeur approchée de *I* à 10^{-1} près.