1. Exercice 2 (6 points)

Partie A - Étude du signe d'une fonction

On désigne par *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2+4\ln x$.

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction *f* en précisant les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif *x*.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative (C) de la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=e^{-\frac{1}{4}x^2}$.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0=0,5 \\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

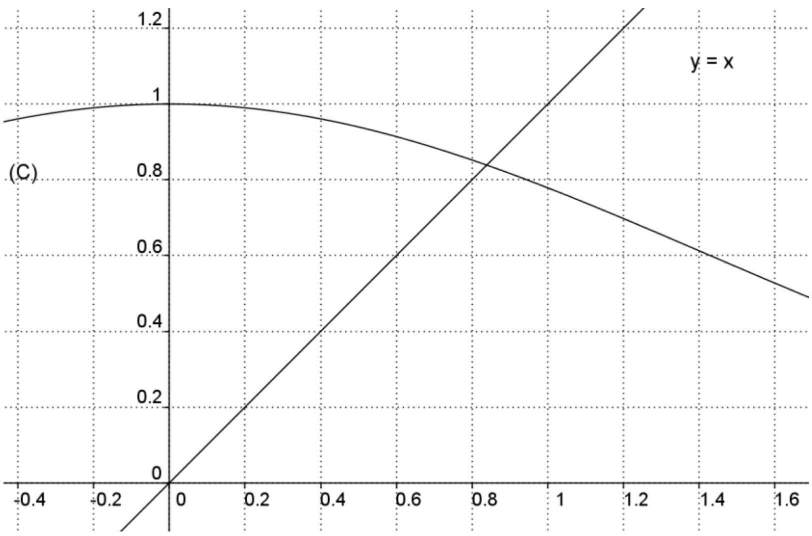
1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x)=x$.

2. Au moyen de la courbe (C) et de la droite d'équation *y = x*, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

3. On admet que pour tout entier naturel *n*, $u_{2n}\le\alpha\le u_{2n+1}$.

En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier *n* pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques. En déduire que 0,838 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

On appelle (L) la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = 2\ln x$.

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (L), il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine *O* que tous les autres.

1. Soient *M* un point de la courbe (L) et *x* son abscisse. Exprimer *OM* en fonction de *x.*

2. a. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$.

Étudier les variations de la fonction *h.* On pourra utiliser la partie A.

b. En déduire qu'il existe un unique point *A* de la courbe (L) tel que pour tout point *M* de (L), distinct de *A,* on ait *OM* > *OA.*

3. Démontrer que la droite (*OA*) est perpendiculaire à la tangente T_A à la courbe (L) au point *A.*