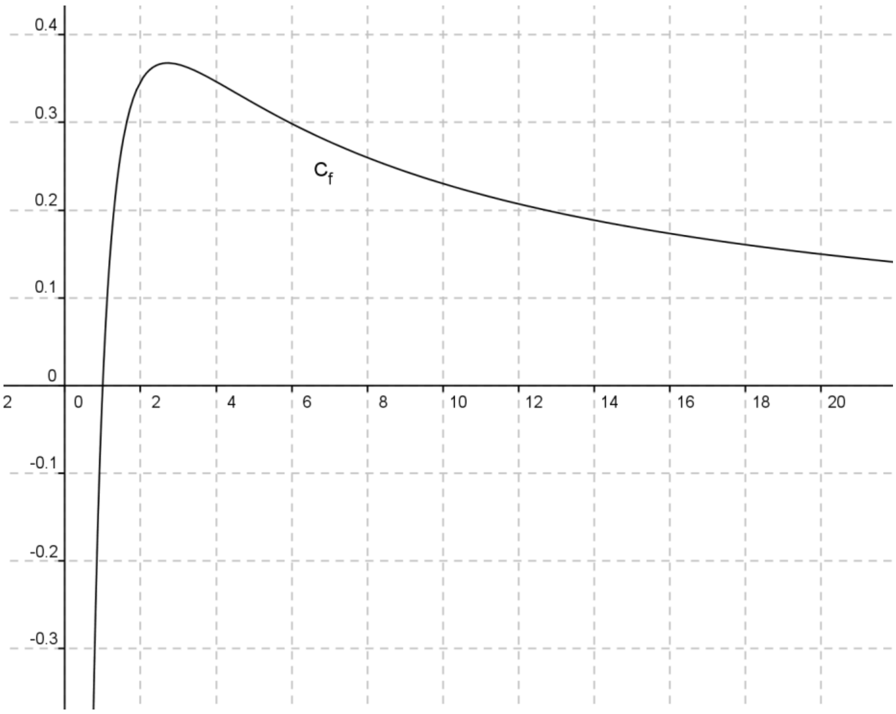
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[.

On note C_f la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère. La courbe C_f est représentée ci-dessous.



a. Déterminer les limites de la fonction *f* en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction *f*.

c. En déduire les variations de la fonction *f*.

2. Étude d'une fonction *g*

On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[par : $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction *g* dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

a. Déterminer la limite de *g* en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\dfrac{\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$.

b. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. a. Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

c. Tracer sur le graphique la courbe C_g.

4. On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

En exprimant l'aire A comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire A.