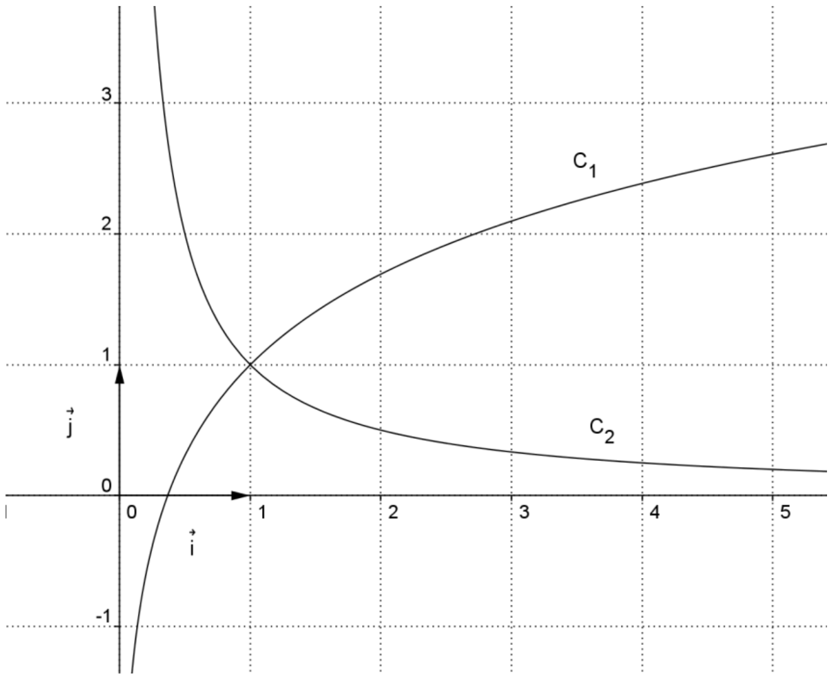
1. Exercice 1 (10 points)

Partie I

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On sait que :

– l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes C_1 et C_2 ;

– l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_2 ;

– la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;

– la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;

– la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

0	$+\infty$	On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

0	0,2	On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, C_1 admet une asymptote oblique :

Oui	Non	On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x)-f_1(x)$ est :

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖ $\quad$ +

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖ $\quad$ −

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖ $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ −

Partie II

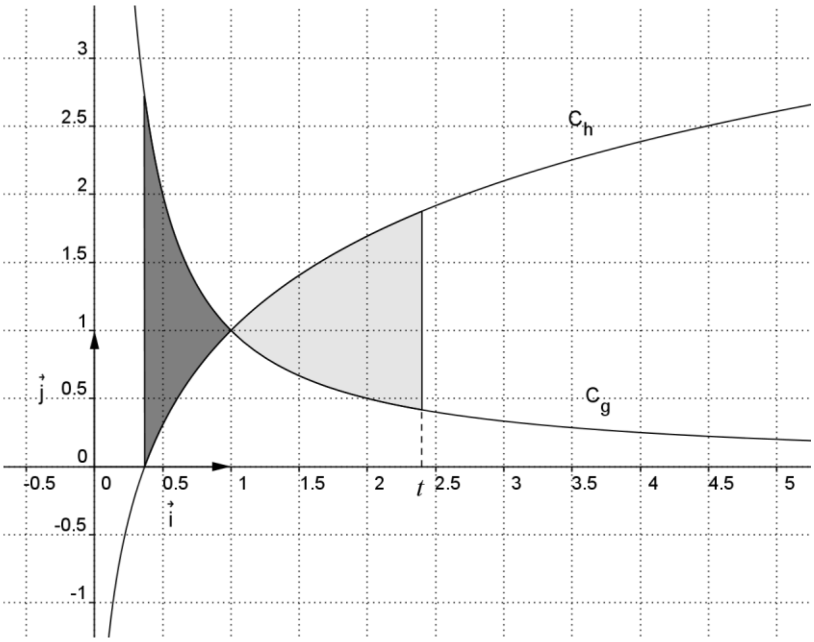
On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+1-\frac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque *x* décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4. Montrer que la fonction *F* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction *f* sur cet intervalle.
5. Démontrer que la fonction *F* est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
6. Montrer que l'équation $F(x)=1-\frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ qu'on note α.
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit *g* et *h* les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x}$ et $h(x)=\ln(x)+1$.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes C_g et C_h représentatives des fonctions *g* et *h*.



1. A est le point d'intersection de la courbe C_h et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.

2. P est le point d'intersection des courbes C_g et C_h. Justifier que les coordonnées du point P sont (1 ; 1).

3. On note A l'aire du domaine délimité par les courbes C_g, C_h et les droites d'équations respectives $x = 1/e$ et $x = 1$ (domaine noir sur le graphique).

a. Exprimer l'aire A à l'aide de la fonction *f* définie dans la partie II.

b. Montrer que $\mathrm{A} = 1 - \dfrac{1}{e}$.

4. Soit *t* un nombre réel de l'intervalle $]1\,;+\infty[$. On note B_t l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes C_g et C_h (domaine grisé sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de *t* telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}_t$.

a. Montrer que $\mathrm{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

b. Conclure.