Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on considère la fonction f_n définie sur]0 ; $+\infty$ [par
$f_n(x)=\dfrac{1+n\ln x}{x^2}$.

Partie A

I. Etude des fonctions f_n

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln x$.

2. Résoudre l'équation $f_n'(x)=0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$.

3. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.

4. Etablir le tableau de variation de f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II. Représentation graphique de quelques fonctions f_n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 5 cm. On note C_n la courbe représentative de f_n dans ce repère.

1. Tracer C_2 et C_3.

2. Calculer $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n.

3. Expliquer comment il est possible de construire la courbe de C_4 à l'aide de C_2 et C_3. Tracer C_4.

Partie B : Calculs d'aires

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

2. En déduire l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par les courbes C_n et C_{n+1} et les droites d'équation x = 1 et $x = e$.

3. On note A_n l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et $x = e$. Calculer A_2. Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation géométrique de sa raison. Exprimer A_n en fonction de n.

Partie C : Etude sur l'intervalle]1 ; $+\infty$ [de l'équation $f_n(x)=1$

Dans toute la suite on prendra $n \geq 3$.

1. Vérifier que pour tout *n*, $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$. En déduire que l'équation $f_n(x)=1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1 ; e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

2. On pose pour $t \geq 1$, $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$. Etudier les variations de φ. En déduire que pour tout *t* appartenant à]1 ; $+\infty$ [, $\varphi(t) \leq \dfrac{1}{e}$, puis que pour tout $n \geq 3$, $f_n(n)<1$.

3. Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ a exactement une solution α_n sur $\left]e^{\frac{n-2}{2n}}, n\right[$. Combien l'équation $f_n(x)=1$ a-t-elle de solutions sur]0 ; $+\infty$ [?

Calculer $f_n\left(\sqrt{n}\right)$ et montrer que pour tout $n \geq e^2$, $f_n\left(\sqrt{n}\right)>1$. En déduire que pour $n \geq 8$ on a $\sqrt{n}<\alpha_n<n$ et donner la limite de la suite (α_n).