On considère la fonction *f* définie sur ]0 ; $+\infty$ [ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1. Déterminer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que *f* est dérivable sur]0 ; $+\infty$ [ et calculer $f'(x)$.

3. Soit *u* la fonction définie sur ]0 ; $+\infty$ [ par $u(x)=\ln x+x-3$.

a. Etudier les variations de *u*.

b. Montrer que l'équation *u*(*x*) = 0 possède une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle [2 ; 3]. Montrer que 2,20 < $\alpha$ < 2,21.

c. Etudier le signe de *u*(*x*) sur ]0 ; $+\infty$ [.

4. a. Etudier les variations de *f*.

b. Exprimer ln$\alpha$ comme un polynôme en $\alpha$. Montrer que $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de *f*( $\alpha$ ) d'amplitude $2\times10^{-2}$

5. a. Etudier le signe de *f*(*x*) sur ]0 ; $+\infty$ [.

b. Tracer la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm..