Soit k un nombre réel. On considère la fonction f_k définie sur [0 ; 1] par

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx \text{ si } x > 0 \text{ et } f_k(0) = 0.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

On note I, J et L les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1).

Première partie : Étude des fonctions f_k

A. Étude et représentation de f_0

Dans cette question $k = 0$.

1. Signe de la dérivée

a. Calculer la dérivée f_0' de f_0 sur]0 ; 1] et montrer que $f_0'(x)$ peut s'écrire $f_0'(x) = (\ln x)(\ln x - 2)$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $f_0'(x) = 0$ sur]0 ; 1].

c. Étudier le signe de f_0' sur]0 ; 1].

2. Étude à l'origine

a. Déterminer la limite de $\dfrac{\ln u}{\sqrt{u}}$, puis de $\dfrac{(\ln u)^2}{u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

b. En déduire que $x(\ln x)^2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, puis que f_0 est continue en 0.

c. Déterminer la limite de $\dfrac{f_0(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. En déduire la tangente en O à la courbe C_0.

3. Tracé de la courbe C_0

a. Dresser le tableau des variations de f_0.

b. Tracer la courbe C_0.

B. Étude de f_k

1. Dérivée de f_k

a. Calculer $f_k'(x)$ sur]0 ; 1].

b. Soit A_k le point de C_k d'abscisse 1. Montrer que la tangente T_k à C_k au point A_k est la droite (OA_k).

2. Étude à l'origine

a. Établir que f_k est continue en 0.

b. Déterminer la tangente à C_k en O.

On ne demande pas d'étudier les variations de f_k.

C. Étude et représentation de f_1 et $f_{\frac{1}{2}}$

1. Étude de f_1 et tracé de C_1

a. Prouver que, pour tout $x \in \,]0\,;1]$, $f_1'(x) = (\ln x + 1)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes C_0 et C_1.

c. Établir le tableau de variation de f_1 et tracer C_1 sur le même graphique que C_0 en précisant le coefficient directeur de la tangente T_1 à C_1 au point A_1.

2. Étude de $f_{\frac{1}{2}}$ et tracé de $C_{\frac{1}{2}}$

a. Prouver que, pour tout x de $[0\,;1]$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{f_0(x) + f_1(x)}{2}$.

b. En déduire une construction de $C_{\frac{1}{2}}$ à partir de C_0 et C_1 et tracer $C_{\frac{1}{2}}$ sur le même graphique que C_0 et C_1 en précisant la tangente $T_{\frac{1}{2}}$ à $C_{\frac{1}{2}}$ au point $A_{\frac{1}{2}}$.