Le but de ce problème est d'étudier, dans un premier temps (partie A), la fonction *f* définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2} \text{ pour } x>0 \text{ et } f(0)=\frac{1}{2}\ ,$$

puis (partie B) de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\,)$, unité graphique : 2 cm. On désigne par C la représentation graphique de *f*.

I. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit *g* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}$.

1. a. Étudier le sens de variation de *g*.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

2. Montrer que, pour tout x de $[2\,;3]$, on a $g(x)<\dfrac{1}{2}$.

II. Etude de *f*

1. Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ (on pourra poser $x=\dfrac{1}{t}$) et démontrer que *f* est continue en 0.

2. La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat.

3. Étudier le sens de variation de *f* (on vérifiera que $f'(x)=g(x)$).

4. a. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=2$ (on pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$).

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ la droite Δ, la courbe C et la droite D d'équation $y = x$.