Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2.$$

On note (C) sa courbe représentative.

<u>Partie A - Étude de la fonction *f* et tracé de la courbe (C)</u>

1. a. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=0$. (On pourra poser $\ln x = X$).

b. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(x)>0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\varphi(x)=f(x)-\left(4e^{-\frac{5}{4}}x-\frac{41}{8}\right)$.

a. Montrer que $\varphi'(x)=\dfrac{4\ln x-1}{x}-4e^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer $\varphi''(x)$.

b. Étudier le sens de variation de φ' sur $]0\,;+\infty[$. En déduire que, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, on a $\varphi'(x)\le 0$.

c. Calculer $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$ déterminer le signe de $\varphi(x)$. En déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

5. Tracer la courbe (C) et la droite (T). (Unité graphique : 2 cm).