

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

II. Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variation de la fonction f .

3. Éléments graphiques et tracés.

a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C).

b. Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) .

c. Tracer la courbe (C) et la droite (Δ) .