Soit *f* la fonction définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} f(0)=0,\ f(1)=0, \\ f(x)=(\ln x)\times\ln(1-x),\ x\in]0\,;1[. \end{cases}$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, ainsi que le résultat suivant : pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x = 0$.

Partie A - Étude de la fonction *f*

1. a. Déterminer la limite quand *x* tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

b. En déduire la limite quand *x* tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. Montrer que pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right[$, $f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$. Que peut-on en conclure pour C ?

3. Soit φ la fonction définie sur]0 ; 1[par : $\varphi(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$.

a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur]0 ; 1[.

b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs a_1 et a_2 sur]0 ; 1[(on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur]0 ; 1[.

c. Déterminer la limite quand *x* tend vers 0 de $\varphi(x)$ et la limite quand *x* tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur]0 ; 1[.

4. a. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur]0 ; 1[.

b. Donner le tableau de variations de *f* .

c. Montrer que, pour tout *x* de]0 ; 1[, les inégalités suivantes sont vraies :
$0<(\ln x)\times\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$.

d. Tracer C .