On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [par : $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left(3-2\ln x\right) \text{ si } x>0 \end{cases}$.

On note *C* la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction *f* ?

b. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

2. a. Étudier la dérivabilité de *f* en 0.

b. Montrer que *f* est dérivable sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [et calculer *f'*(*x*) pour *x* > 0.

3. Étudier le sens de variations de *f* sur [0 ; $+\infty$ [, puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation *f*(*x*) = 0 possède une solution unique α sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [.
Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente *D* à la courbe *C* au point d'abscisse $x=1$.

2. On considère la fonction *g* : $x \mapsto f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$ [.

a. Calculer *g'*(*x*), puis *g''*(*x*) où *g'* et *g''* désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de *g*. Étudier le sens de variations de *g'*. En déduire le signe de *g'*(*x*) sur]0 ; $+\infty$ [.

b. Étudier le sens de variations de *g*. En déduire la position de la courbe *C* par rapport à la tangente *D*.

3. Construire la courbe *C* et la tangente *D* (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. *n* est un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de *n* le réel $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x\,dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

2. En déduire en fonction de l'entier *n*, l'aire A_n exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe *C* , la tangente *D* et les deux droites d'équation $x=\dfrac{1}{n}$ et *x* = 1.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ et interpréter le résultat obtenu.