Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1\,.$$

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$. En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.

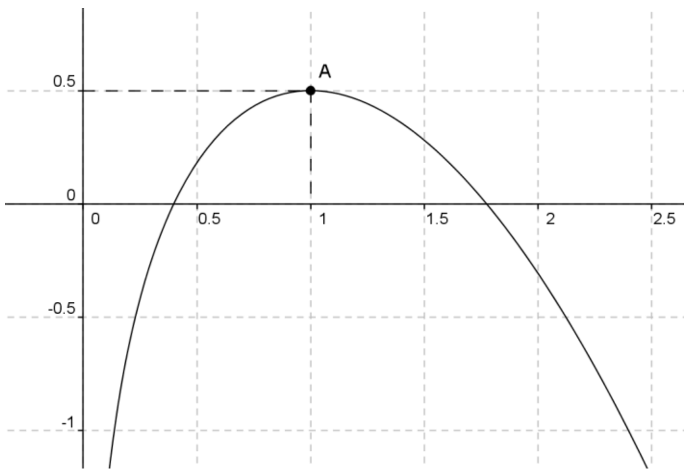
4. Pour un nombre réel k strictement positif on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k.

Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k = \frac{1}{2}$.

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{1/2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.