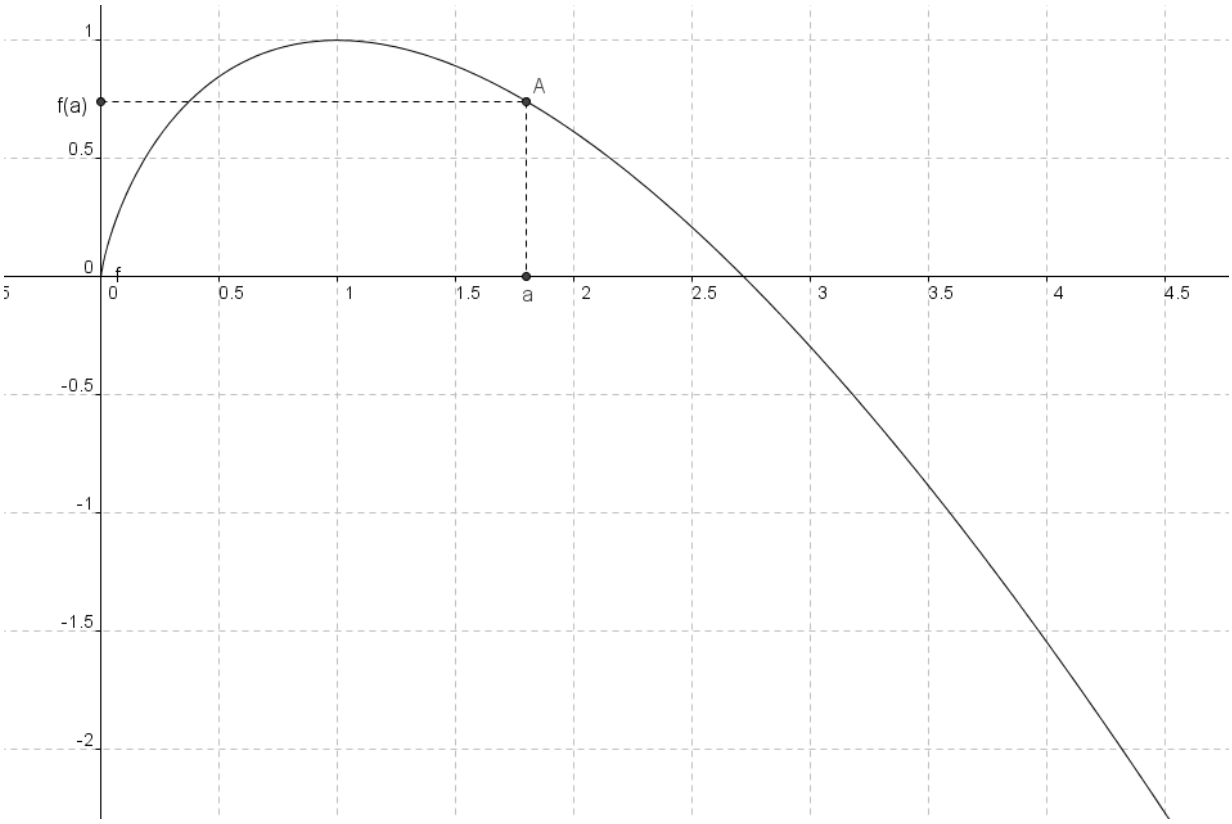
Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x(1-\ln x)$.

La courbe représentative C de la fonction *f* est donnée ci-dessous.



Partie I : Étude de la fonction *f*

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel *x*.

2. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.

3. Déterminer la dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Soit *a* un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_A) au point A de la courbe C d'abscisse *a*.

a. Déterminer, en fonction du nombre réel *a*, les coordonnées du point A_0, point d'intersection de la droite (T_A) et de l'axe des ordonnées.

b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_A). Construire la tangente (T_A) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit *a* un nombre réel strictement positif. On note $\mathrm{A}(a)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = e$.

1. Justifier que $\mathrm{A}(a)=\int_a^e f(x)\,dx$, en distinguant le cas $a < e$ et le cas $a > e$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{A}(a)$ en fonction de a.