TS **LOGARITHME** feuille 27

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln x - 2x^2 - 1$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction g dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (aucune limite n'est demandée).

2. Déduire du 1. que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x - \dfrac{\ln x}{x}$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. Soit D la droite d'équation $y = 1 - 2x$.

a. Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

3. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En utilisant la partie A déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la droite D et la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Calcul d'une aire

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$.

2. On désigne par A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan comprise entre la droite D, la courbe C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a. Hachurer sur le graphique la partie du plan définie ci-dessus.

b. Calculer la valeur exacte du nombre réel A.