PROBLEME *(10 points)* commun à tous les candidats

Les buts du problème sont l'étude de la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$, puis la recherche de primitives de cette fonction.

Première partie - Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction *g* sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1).$$

a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$.

En déduire la limite de $g(x)$ lorsque *x* tend vers 1. (0,5 point)

b) Calculer $g'(x)$ pour *x* appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$. (0,5 point)

c) Résoudre l'inéquation $1-\ln(x-1)>0$, d'inconnue *x* appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$.

(0,5 point)

d) Étudier le sens de variation de *g* sur l'intervalle $]1;+\infty[$. (0,5 point)

e) Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1;e^3+1]$, et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1;\alpha[$ et $]\alpha;+\infty[$.

(1 point)

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}.$$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=0$. (1 point)

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

(1 point)

c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1\,;\sqrt{\alpha}\,[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.
(1 point)

Deuxième partie - Étude de la fonction *f*

1. Vérifier que, pour tout *x* appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $f(x)=\varphi(\mathrm{e}^{x})$.

(0,5 point)**2.** En déduire :

a) la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers 0 ; (0,25 point)

b) la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers + ∞ ; (0,25 point)

c) le sens de variation de *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que *f* admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$. (0,5 point)

3. Montrer que, pour tout *x* de l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$$f(x)\leq\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}.$$
(0,5 point)

4. Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :
(0,5 point)

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
f(*x*)						

5. Représenter graphiquement *f* dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α. (0,5 point)