

ÉTUDE D'UNE FONCTION f ET DE SA COURBE REPRÉSENTATIVE C

On considère la fonction f , définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par C sa courbe représentative relativement au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0 .
- 2) Montrer que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
- 3) Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.
 - a) Étudier les variations de u .
 - b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2,3]$.

Montrer que $2,20 < \alpha < 2,21$.

- c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

- 4) a) Étudier les variations de f .

- b) Exprimer $\ln \alpha$ comme polynôme en α .

Montrer que :

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}.$$

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2} .

- 5) a) Étudier le signe de $f(x)$.
- b) Tracer C .