PROBLEME *(10 points)* commun à tous les candidats

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$ (unité : 2 cm).

On rappelle qu'une fonction f est majorée par une fonction g (ce qui signifie aussi que g est minorée par f) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f(x) \leq g(x)$.

Partie A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ et } g(x) = \frac{2x}{x+2}\ ;$$

on notera C la représentation graphique de f et Γ celle de g.

On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0; +\infty[$.

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) Étudier le sens de variation de h sur $[0; +\infty[$; calculer $h(0)$. (L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)

2) En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

$$(1) \qquad \frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x)$$

3) Construire dans le même repère les courbes C et Γ et montrer qu'elles admettent en O une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

PARTIE B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \to \mathrm{k}x$, majorant la fonction $f : x \to \ln(1+x)$ sur $[0;+\infty[$.

Soit f_k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - \mathrm{k}x$.

1) Étudier le sens de variation de f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = \ln(1+x) - x.$$

2) Étudier la limite de f_1 en $+\infty$ et donner la valeur de f_1 en 0.

3) Montrer que pour tout réel x positif ou nul :

$$\ln(1+x) \leq x.$$

4) En déduire que si $\mathrm{k} \geq 1$, alors :pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq \mathrm{k}x$.

5) Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.

Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \dfrac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k .

(L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)

6) En déduire les valeurs de k strictement positives telles que :

pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$.