1. Exercice 4 (6 points)

Partie A

Soit *u* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x)=x^2-2+\ln x$.

1. Étudier les variations de *u* sur $]0\,;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que l'équation *u*(*x*) = 0 admet une solution unique sur $]0\,;+\infty[$.

On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de *u*(*x*) suivant les valeurs de *x*.

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$.

On note f' la fonction dérivée de *f* sur $]0\,;+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout *x* de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de *u*(*x*).

2. En déduire les variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on note :

· Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;

· *A* le point de coordonnées (0 ; 2) ;

· *M* le point de Γ d'abscisse *x*, *x* appartenant à $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que la distance *AM* est donnée par $AM=\sqrt{f(x)}$.

2. Soit *g* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

a. Montrer que les fonctions *f* et *g* ont les mêmes variations sur $]0\,;+\infty[$.

b. Montrer que la distance *AM* est minimale en un point de Γ, noté *P*, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (*AP*) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en *P* ?