TS **LOGARITHME** feuille 16

PROBLEME *(11 points)* commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O; $\vec{i}, \vec{j}$) (unité 3 cm).

On considère la fonction numérique f définie sur **R** par

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2).$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans (O; $\vec{i}, \vec{j}$).

Partie A

1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$. (0,5 point)

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur **R**.

(0,5 + 0,5 point)

3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Représenter (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x$: on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C) et on placera les points d'abscisse 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

(1,5 point)

Partie B

On s'intéresse à l'intersection de (C) et de (Δ).

On pose, pour tout réel x, $\varphi(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur **R**. (0,5 + 0,25 point)

2. *a)* Déterminer la limite de φ en $-\infty$. (0,5 point)

b) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right).$$ (0,5 point)

En déduire la limite de φ en $+\infty$. (0,5 point)

3. Montrer que φ est une bijection de **R** sur **R**. (0,5 point)

En déduire que la droite (Δ) coupe la courbe (C) en un point et un seul. (0,25 point)

On désigne par α l'abscisse de ce point. Montrer que $0,3 < \alpha < 0,4$. (0,25 point