PROBLEME *(11 points)* commun à tous les candidats

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). L'unité graphique est 2 cm.

PARTIE A. - ETUDE D'UNE FONCTION *g*

soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(\mathrm{x})=x \ln x - x + 1$$

et C sa représentation graphique dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Étudiez les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Étudiez les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

3) On note C' la représentation graphique de la fonction $x \to \ln x$

dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Montrez que C et C' ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1, e]$,on a :

$$x \ln x - x + 1 \leq \ln x.$$

On ne demande pas de représenter C et C'.

4.a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$\mathrm{J} = \int_1^{\mathrm{e}} (x-1)\ln x \, dx.$$

b) Soit Δ le domaine plan défini par :

$$\Delta = \{ \mathrm{M}(x, y);\ 1 \leq x \leq e \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x \}.$$

Déterminer, en cm^2, l'aire de Δ.

Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

PARTIE B. ETUDE D'UNE FONCTION *f*

Soit *f* la fonction définie sur]1, +∞[par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x .$$

1) Étudiez les limites de *f* en +∞ et en 1 (pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement).

   2) Déterminer le tableau de variation de *f* (on pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$).

2) Tracer la courbe représentative de *f* dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).