

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x$ .

Pour tout réel  $a$  strictement positif, on définit sur  $]0; +\infty[$  la fonction  $g_a$  par  $g_a(x) = ax^2$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\Gamma_a$  celle de la fonction  $g_a$  dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  suivant les valeurs du réel strictement positif  $a$ .

### Partie A

On a construit en **annexe 1** (à rendre avec la copie) les courbes  $\mathcal{C}$ ,  $\Gamma_{0,05}$ ,  $\Gamma_{0,1}$ ,  $\Gamma_{0,19}$  et  $\Gamma_{0,4}$ .

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  suivant les valeurs (à préciser) du réel  $a$ .

### Partie B

Pour un réel  $a$  strictement positif, on considère la fonction  $h_a$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que  $x$  est l'abscisse d'un point  $M$  appartenant à l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  si et seulement si  $h_a(x) = 0$ .
2. a. On admet que la fonction  $h_a$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , et on note  $h'_a$  la dérivée de la fonction  $h_a$  sur cet intervalle.  
Le tableau de variation de la fonction  $h_a$  est donné ci-dessous.  
Justifier, par le calcul, le signe de  $h'_a(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .

| $x$       | 0         | $\frac{1}{\sqrt{2a}}$    | $+\infty$ |
|-----------|-----------|--------------------------|-----------|
| $h'_a(x)$ | +         | 0                        | -         |
| $h_a(x)$  | $-\infty$ | $\frac{-1 - \ln(2a)}{2}$ |           |

- b. Rappeler la limite de  $\frac{\ln x}{x}$  en  $+\infty$ . En déduire la limite de la fonction  $h_a$  en  $+\infty$ .  
On ne demande pas de justifier la limite de  $h_a$  en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = 0,1$ .
- a. Justifier que, dans l'intervalle  $]0; \frac{1}{\sqrt{0,2}}]$ , l'équation  $h_{0,1}(x) = 0$  admet une unique solution.  
On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle  $]\frac{1}{\sqrt{0,2}}; +\infty[$ .
- b. Quel est le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_{0,1}$  ?
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = \frac{1}{2e}$ .
- a. Déterminer la valeur du maximum de  $h_{\frac{1}{2e}}$ .
- b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ . Justifier.
5. Quelles sont les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

