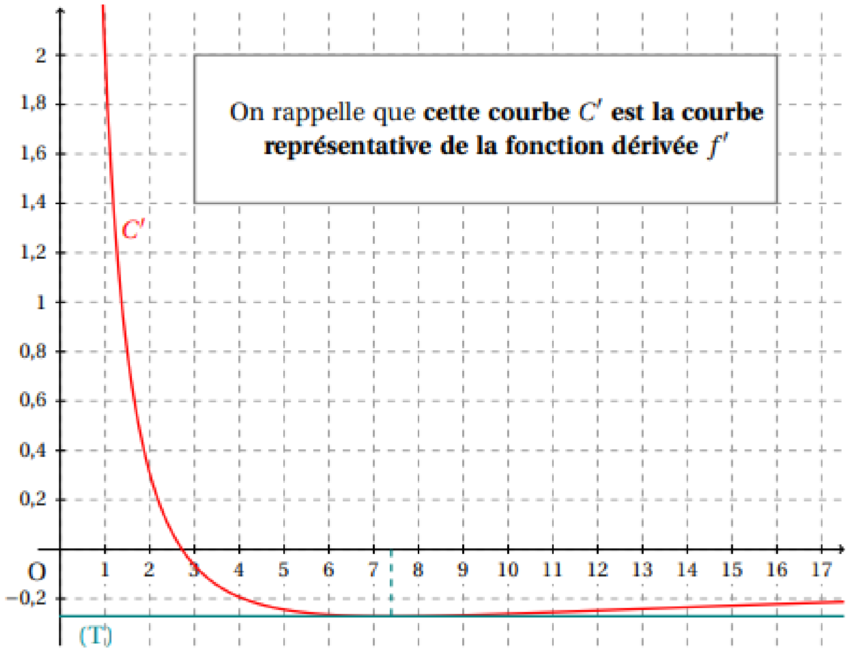
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.
La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :

a. le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.

b. le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.

4. **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.

b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.
Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C.