

**PARTIE A**

On définit sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la fonction  $g$  par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où } \ln \text{ désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[ = I$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour  $x > 0$ , le signe de  $g'(x)$  est celui du trinôme du second degré  $(x^2 - 2x + 2)$ .
2. En déduire que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .
3. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[0,5; 1]$ , que l'on notera  $\alpha$ .
4. On donne le tableau de signes de  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[ = I$  :

$x$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

**PARTIE B**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[ = I$  par :

$$f(x) = e^x \ln x.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ , on note  $f'$  sa fonction dérivée,  $f''$  sa fonction dérivée seconde et on admet que :

$$\text{pour tout nombre réel } x > 0, f'(x) = e^x \left( \frac{1}{x} + \ln x \right).$$

$$\text{Démontrer que, pour tout nombre réel } x > 0, \text{ on a : } f''(x) = e^x \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \right).$$

2. On pourra remarquer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $f''(x) = e^x \times g(x)$ , où  $g$  désigne la fonction étudiée dans la partie A.
3. a. Dresser le tableau de signes de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . Justifier.  
b. Justifier que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un unique point d'inflexion A.  
c. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Justifier.
4. a. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
b. Montrer que  $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1 - \alpha)$ .  
On rappelle que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 0$ .  
c. Démontrer que  $f'(\alpha) > 0$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .  
d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .